

Douglas R. Hofstadter

GÖDEL, ESCHER, BACH

Egybefont Gondolatok Birodalma

Metaforikus fúga elmékre és gépekre,
Lewis Carroll szellemében

Op!n Books

Áttekintés

I. rész: GEB

Bevezetés: Zeneo-logikai áldozat. A könyvet Bach *Zenei áldozat* című művének története nyitja. Bach rögtönözve meglátogatta Nagy Frigyes porosz királyt, amikor is a király azt kérte, hogy Bach rögtönözzön az általa megadott témára. Bach improvizációi alkották ennek a nagy műnek az alapját. A *Zenei áldozat* és annak története egy olyan témát alkot, melyre a könyvben véges-végig improvizálok, ennek révén egyfajta „Metazenei áldozat” jön létre. Az önhivatkozás és a különféle bachi szintek közötti összjáték tárgyalása közvetlenül az Escher-rajzok és a Gödel-Tétel párhuzamos gondolatainak tárgyalásához vezet. A Gödel-Tétel hátterét a logika és a paradoxonok történetének rövid áttekintése adja. Innen a következtetés gépesítéséhez és a számítógépekhez jutunk, valamint ahhoz a vitához, hogy vajon lehetséges-e a mesterséges intelligencia. A fejezet a könyv eredetének – ezen belül a párbeszédnek hogyanjának és miként-jének – magyarázatával zárul.

Háromszólamú invenció. Bach tizenöt háromszólamú invenciót írt. Ebben a háromszereplős (háromszólamú) párbeszédben Zénón „kitalálja” a Teknőst és Akhilleuszt – a párbeszédnek képzeletbeli ellenlábasait (mint ahogy a valóságban is kitalálta őket a Zénón-féle mozgási paradoxonok szemléltetésére). A párbeszéd nagyon rövid, csak a további párbeszédnek alaphangulatát érzékelteti.

I. fejezet: Az MU-rejtvény. Egy egyszerű formális rendszer (az MIU-rendszer) bemutatása után egy rejtvény révén ismerkedhet meg az Olvasó a formális rendszerekkel általában. Számos alapfogalmat vezetünk be: karakterlánc, tétel, axióma, levezetési szabály, levezetés, formális rendszer, döntési eljárás, a rendszeren belüli/kívüli munka.

Kétszólamú invenció. Bach tizenöt kétszólamú invenciót is írt. Ezt a kétszereplős (kétszólamú) invenciót nem én írtam, hanem Lewis Carroll 1895-ben. Carroll Zénontól kölcsönözte Akhilleuszt és a Teknőst, én pedig Carrolltól kölcsönöztem őket. A téma az, hogy mi a kapcsolat a következtetés, a következtetésről szóló következtetés, a következtetésről szóló következtetésről szóló következtetés stb. között. Ez a paradoxon bizonyos értelemben a mozgás lehetetlenségét állító Zénón-féle paradoxon párja, mivel végtelen regresszió révén látszólag megmutatja, hogy a következtetés lehetetlen. Erre a szép paradoxonra a könyvben később többször is hivatkozunk.

II. fejezet: A matematikai jelentés és forma. Egy új formális rendszer (a pg-rendszer) bemutatása, amely még az I. fejezetben szereplő MIU-rendszerénél is egyszerűbb. Bár a pg-rendszer szimbólumai látszólag értelmetlenek, hirtelen kiderül, hogy az őket tartalmazó tételek formáinak köszönhetően jelentésük van. Ez a felfedezés adja az első fontos betekintést abba, hogy mi a jelentés, és mennyire mély a kapcsolata az izomorfizmusokkal. Ezután különféle, a jelentéssel kapcsolatos kérdéseket tárgyalunk, olyanokat például, mint az igazság, a bizonyítás, a szimbólumkezelés és a „forma” megfoghatatlan fogalma.

Szonáta szóló-Akhilleuszra. Ez a párbeszéd Bach szólóhegedűre írt szonátaát utánozza, főként azért, hogy csak Akhilleusz beszél, mivel a párbeszéd egy olyan telefonhívás egyik felének leírata, ahol a vonal túlsó végén a Teknős van. Beszélgetésük az „alak” és „háttér” fogalmát érinti különféle környezetekben – például Escher művészetében. Maga a párbeszéd is példa az alak és a háttér közötti különbségtételre, mivel Akhilleusz sorai alkotják az „alak”-ot, a Teknős Akhilleusz soraiban impliciten benne lévő sorai pedig a „háttér”-et.

III. fejezet: Alak és háttér. Az alaknak és a háttérnek a művészetben szokásos megkülönböztetése a formális rendszerek tételei és nemtételei közötti különbségtételhez hasonlítható. Arra a kérdésre, hogy „vajon egy alak szükségszerűen ugyanazt az információt tartalmazza-e, mint a háttér-e?”, a rekurzívan felsorolható halmazok és a rekurzív halmazok közötti különbségtétel a válasz.

Contracrostipunctus. Ez a párbeszéd központi jelentőségű, mivel Gödel önhivatkozó szerkezetének és a Nemteljességi Tételnek számos átiratát tartalmazza. A Tétel egyik átírása szerint: „mindegyik lemezjátszóhoz van olyan lemez, amelyet a lemezjátszó nem tud lejátszani”. A párbeszéd címe az „akrosztichon” és a „kontrapunkt” latin szavak kereszteződése. Ez utóbbit Bach gyakran használta *A fúga művészete* című művében lévő kánonok és fúgák megjelölésére. Néhány közvetlen hivatkozás is van *A fúga művészetére*. A párbeszédén belül van néhány fogás, mely akrosztichonokon alapul.

IV. fejezet: Következetesség, teljesség és geometria. Az előző párbeszédet magyarázza annyira, amennyire csak lehetséges ebben a fázisban. Ez ahhoz a kérdéshez vezet vissza, hogy hogyan és mikor nyernek értelmet egy formális rendszer szimbólumai. Az euklideszi és nemeuklideszi geometria története a „nem definiált kifejezések” nehezen megfogható fogalmát szemlélteti. Innen a különféle, esetlegesen „rivális” geometriák következetességéről szóló gondolatokhoz jutunk. Ezek tárgyalása során tisztázzuk a nem definiált kifejezések kapcsolatát az érzékeléssel és a gondolkodási folyamatokkal.

Kis harmóniai labirintus. Ez a párbeszéd a hasonló című Bach-orgonadarabon alapul. Játékos bevezetés a rekurzív – vagyis egymásba ágyazott – szerkezetekbe. Történeteken belüli történeteket tartalmaz. A kerettörténet a várt módon való befejeződés helyett nyitva marad, és az Olvasót megoldás nélkül, függő állapotban hagyja. Az egyik beágyazott történet a zenei modulációról szól – nevezetesen egy orgonaműről, amely rossz hangnemben végződik, és a hallgatót megoldás nélkül, függő állapotban hagyja.

V. fejezet: Rekurzív szerkezetek és eljárások. A rekurzió gondolatát a fejezet különféle környezetekben mutatja be: zenei minták, nyelvi mintázatok, geometriai szerkezetek, matematikai függvények, fizikai elméletek, számítógépprogramok és egyéb összefüggések keretében.

Kánon intervallumnöveléssel. Akhilleusz és a Teknős azt a kérdést próbálja megoldani, hogy „mi tartalmaz több információt – egy lemez vagy az azt lejátszó fonográf?” Ez a furcsa kérdés akkor merül fel, amikor a Teknős egy olyan lemezről mesél, amely két különböző fonografon teljesen eltérő dallamokat eredményez: B-A-C-H és C-A-G-E. Kiderül azonban, hogy egy különleges értelemben ezek a dallamok „egyformák”.

VI. fejezet: A jelentés helye. Átfogó ismertetés arról, hogyan oszlik meg a jelentés a kódolt üzenet, a dekódoló és a befogadó között. A bemutatott példák között DNS-szálak, régi kódtáblák megfejtetlen feliratai és űrben lebegő fonográffelvételek vannak. A fejezet az intelligencia és az „abszolút” jelentés kapcsolatát posztulálja.

Kromatikus fantázia és fűrés. Egy rövid párbeszéd, amely a címétől eltekintve alig emlékeztet valamiben Bach *Kromatikus fantázia és fűga* című művére. A párbeszéd témája az, hogy a mondatok helyes módon történő kezelésével hogyan lehet megőrizni az igazságot, főként pedig az, hogy vajon léteznek-e az „és” szó használatára vonatkozó szabályok. Ez a párbeszéd sokban emlékeztet Lewis Carroll párbeszédjére.

VII. fejezet: Az ítéletkalkulus. Javaslat arra, hogy az „és”-hez hasonló szavakat hogyan lehet formális szabályokkal kezelni. Ismét előkerülnek az izomorfizmusra vonatkozó gondolatok és az, hogy mitől válnak a szimbólumok automatikusan értelmessé az ilyen rendszerekben. A fejezetben szereplő összes példa „Zentencia” – zen kóanokból átvett szentencia (mondat). Ez részemről tudatos, bár kissé vicces döntés volt, mivel a zen kóanok szándékosan következtetlen történetek.

Rákkánon. A párbeszéd a *Zenei áldozat* hasonló című darabján alapul. Mindkettőt azért nevezik így, mivel a rákok (állítólag) hátrafelé mozognak. A Rák ebben a párbeszédben tűnik fel először. A formális mutatóványokat és a szintekkel való játékot illetően talán ez a könyv legtömörebb párbeszéde. Gödel, Escher és Bach mélyen egybefonódik ebben a nagyon rövid párbeszédben.

VIII. fejezet: Tipográfiai Számelmélet. A fejezet a logikai műveletek „TSZ”-nek nevezett ki-terjesztését mutatja be. A TSZ-ben merev szimbólumkezeléssel számelméleti következtetések végezhetők. A formális következtetés és az emberi gondolkodás közötti különbségről is szó esik.

MU-áldozat. Ez a párbeszéd a könyv számos új témáját vetíti előre. Látszólag a zen buddhizmussal és a kóanokkal foglalkozik, a valóságban azonban alig leplezett módon azt tárgyalja, hogy a számelméleti stringek mikor tételek és mikor nem, mikor igazak és mikor hamisak. Számos hivatkozás történik a molekuláris biológiára – különösen a genetikai kódra. A címtől és az önhivatkozó játékoktól eltekintve nincs szoros kapcsolat a *Zenei áldozattal*.

IX. fejezet: Mumon és Gödel. Kísérlet a zen buddhizmus furcsa gondolatainak tárgyalására. A fejezet központi alakja egy Mumon nevű szerzetes, aki sok kóant közismert magyarázatokkal látott el. A zen gondolatai bizonyos módon képletesen emlékeztetnek a matematika és a filozófia néhány mai gondolatára. Ezután a „zenkedés” után bevezetjük a Gödel-számozást, amely Gödel alapvető gondolata volt, és első ízben tekintjük át a Gödel-Tételt.

II. rész: EGB

Prelúdium... Ez a párbeszéd a következő párbeszédhez kapcsolódik. A párbeszédnek Bach *Das wohltemperierte Klavier* című művének prelúdiumain és fűgáin alapulnak. Akhilleusz és a Teknős ajándékot hoz a Ráknak. A Rák egy további vendége a Hangyász. Kiderül, hogy az ajándék a *Wohltemperierte Klavier* egyik felvétele; azonnal felteszik az első lemezt. A prelúdium hallgatása közben megtárgyalják a prelúdiumok és fűgák szerkezetét, ami arra készteti Akhilleuszt, hogy megkérdezze, vajon hogyan kell hallgatni egy fűgát: mint egy egészt, vagy mint részek összegét? Ez a teljesség és a redukcionizmus közötti vita tárgya, a vita a *Hangyafűgában* folytatódik majd.

X. fejezet: Leírási szintek és számítógéprendszerek. Képek, sakktáblák és számítógéprendszerek vizsgálatának különféle szintjeit tárgyalja. Ezután az utóbbit részletesen is megvizsgálja, ennek részei többek között az assembly nyelvek, a fordítóprogramok, az operációs rendszerek,

és így tovább. Ezután másfajta összetett rendszerek, például focicsapatok, atommagok, atomok, az időjárás stb. tárgyalására tér át. Felmerül az a kérdés, hogy hány közbülső szint létezik – vagy hogy létezik-e akár egyetlenegy is.

...*Hangyafűga*. Egy zenei fűga utánzata: mindegyik szereplő ugyanazzal a mondattal lép be. A témát – teljesség vagy redukcionizmus – egy olyan rekurzív kép vezet be, amely szavakból áll, a szavak viszont apróbb szavakból állnak stb. Ennek a furcsa képnek a négy szintjén a „TELJESSÉG”, a „REDUKCIONIZMUS” és az „MU” szavak szerepelnek. A beszélgetés a Hangyász egy barátjára is kitér, Bolyai nénire, egy értelmes hangyabolyra. Az ő gondolkodási folyamatainak különféle szintjei adják a beszélgetés témáját. A párbeszéd sok, a fűgakból ismert eszközt vonultat fel. Az Olvasó számára útmutatásul hivatkozások vannak a lemezről felhangzó fűga párhuzamos eszközeire. A *Hangyafűga* végén a *Prelúdium* témái térnek vissza, meglehetősen átalakított formában.

XI. fejezet: Agyak és gondolatok. A fejezet témája: „hogyan támogatja az agy hardvere a gondolatokat?” Először az agy nagy és kis léptékű felépítését ismerteti, majd spekulatív módon részletesen tárgyalja a fogalmak és az idegi aktivitás közötti összefüggést.

Angol–francia–német–magyar szvit. Közjáték, amely Lewis Carroll „Jabberwocky” című nonszensz verséből és három fordításból áll: az első francia, a második német, a harmadik magyar; az első két fordítás a XIX. században készült, a harmadik pedig a XX. században.

XII. fejezet: Elmék és gondolatok. Az előző versek azt a kérdést vetik fel erőteljes módon, hogy a nyelvek vagy a gondolkodó emberek megfelleltethetők-e egymásnak. Hogyan lehetséges két különálló fizikai agy között a kapcsolattartás? Mi az, ami az összes emberi agyban közös? Egy földrajzi analógia segítségével próbálunk válaszolni. Felmerül a kérdés: „képes-e egy külső szemlélő valamilyen objektív értelemben egy agy megértésére?”

Ária különféle változatokkal. A párbeszéd formája Bach *Goldberg-variációk* című művén alapul, tartalma pedig olyan számelméleti problémákkal kapcsolatos, mint például a Goldbach-sejtés. Ennek a hibrid fejezetnek a fő célja az, hogy bemutassa: a számelmélet bonyolultsága abból fakad, hogy a végtelen térben való keresés témájának sok különféle változata van. Némelyik ezek közül végtelen kereséshez vezet, némelyik véges kereséshez, míg a többi a kettő között lebeg.

XIII. fejezet: KcikluS, FcikluS és FFcikluS. Ez három számítógépes nyelv elnevezése. A KcikluS-programokkal csak megjósolhatóan véges keresések hajthatók végre, míg a FcikluS-programokkal megjósolhatatlanul hosszú vagy akár végtelen keresések. A fejezet célja a számelmélet primitív rekurzív és általánosan rekurzív függvényfogalmának intuitív megvilágítása, mivel ezek szerepe alapvető a Gödel-Tétel bizonyításában.

Air G-re. Gödel önhivatkozó szerkezetét szavakban tükröző párbeszéd. Az ötlet W. V. Quine-től származik. A párbeszéd a következő fejezet mintájául szolgál.

XIV. fejezet: A TSZ és a hozzá hasonló rendszerek formálisan eldönthetetlen állításairól. A fejezet címe Gödel 1931-es cikkének címét adaptálja. Gödel ebben a cikkben publikálta először Nemteljességi Tételét. Részletesen ismertetjük a gödeli bizonyítás két fő részét. Megmutatjuk, hogy a TSZ következetességét feltételezve miért kényszerülünk arra a következtetésre, hogy a TSZ (vagy bármely hasonló rendszer) nem teljes. Az euklideszi és a nemeuklideszi geometriával való kapcsolatot is tárgyaljuk. Részletesen elemezzük, hogy a Tétel miként hat a matematikai filozófiára.

Születésnap kantátata... Melyben Akhilleusznak nem sikerül meggyőznie a körmönfont és kételkedő Teknőst arról, hogy ma van a születésnapja. Erre irányuló ismétlődő, de sikertelen kísérletei előrevetítik Gödel érvelésének megismételhetőségét.

XV. fejezet: Kiugrás a rendszerből. Megmutatja Gödel érvelésének megismételhetőségét, amelynek következtében a TSZ nemcsak hogy nem teljes, de „alapvetően nem teljes”. Elemzi J. R. Lucas eléggé közismert érvelését, amely szerint a Gödel-Tétel azt mutatja, hogy az emberi gondolkodás semmilyen értelemben sem lehet „mechanikus”, és bemutatja, hogy ez az érvelés kívánnivalókat hagy maga után.

Egy dohányos épületes gondolatai. Sok témát érintő párbeszéd, melynek középpontjában az ön-reprodukcióval és az önhivatkozással kapcsolatos problémák állnak. A felhasznált példák között televíziós képernyőket felvevő televíziós kamerák, vírusok, valamint egyéb, a sejtnél kisebb, önmagukat összeszerelő egységek vannak. A cím egy költeményre utal, amelyet maga J. S. Bach írt, és különleges módon kerül a képbe.

XVI. fejezet: Önhiv és önrep. Ez a fejezet a különféle megjelenési formájú önhivatkozások és az önmagukat reprodukáló egyedek (például számítógépprogramok, DNS-molekulák) közötti kapcsolatról szól. Az önreprodukáló egyedek és az önreprodukciót segítő külső mechanizmusok (például számítógépek vagy fehérjék) közötti kapcsolatot is tárgyalja – főként a különbségtétel elmosódott voltát. A fejezet központi témája az, hogy miként terjed az információ az ilyen rendszerek különböző szintjei között.

Magnífirák dé(l)ben. A cím egy szójáték Bach D-dúr *Magnificat*jára. A történet a Rákról szól, aki azt a benyomást kelti, mintha mágikus képességgel meg tudná különböztetni a számelmélet igaz vagy hamis állításait oly módon, hogy zenei darabokként értelmezi őket, lejátssza a fuvoláján, és eldönti, hogy „szépek”-e, vagy sem.

XVII. fejezet: Church, Turing, Tarski és mások. Az előző párbeszéd képzelt Rákját csodálatos képességű valóságos emberek helyettesítik. Különbő, különböző erősségű változatokban bemutatjuk a Church–Turing–Tézist, amely a szellemi tevékenységet a számítástechnikával hozza kapcsolatba. Az összes változatot elemezzük, különösen abból a szempontból, hogy milyen hatással vannak az emberi gondolkodás számítógépes szimulációjára; megvizsgáljuk, hogy beprogramozható-e egy olyan képesség, amely érzékeli a szépséget vagy szépséget hoz létre. Az agytevékenység és a kiszámíthatóság közötti kapcsolat néhány egyéb problémát is felvet: a Turing-féle leállási problémát és Tarski Tételét.

SHRDLU az én örömem. A párbeszédet Terry Winograd egyik cikkéből emeltük ki, amely az általa írt SHRDLU programról szól; csupán néhány nevet változtattunk meg. A párbeszédben egy program és egy ember beszélget eléggé meggyőző angolsággal egy ún. „építőköcka-világról”. Úgy tűnik, mintha a számítógépprogram bizonyos mértékű értelmet mutatna – a saját korlátozott világában. A párbeszéd címe Bach 147. kantátájának egyik tételén alapul, melynek címe: *Jesu, meine Freude* (Jézus az én örömem).